# MÔ HÌNH HÓA TRƯỜNG VÉC TƠ VẬN TỐC BẰNG ĐA THỨC TRỰC GIAO LEGENDRE

**Nguyễn Văn Tuệ**[1], **Nguyễn Tường Vi**[2]

**Tóm tắt:** *Trong lĩnh vực cơ học chất lỏng, việc mô hình hóa một dòng chuyển động luôn là một vấn đề được các nhà khoa học hết sức quan tâm. Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu một phương pháp đã được nghiên cứu, đồng thời được kiểm nghiệm trên các bộ dữ liệu thực nghiệm và cho ra kết quả hết sức khả quan. Đó là sử dụng phương pháp nội suy trong toán học để mô hình hóa các trường véc tơ vận tốc của dòng chảy bằng các hàm đa thức đa biến. Từ các trường véc tơ vận tốc đã được mô hình hóa, chúng ta có thể dễ dàng sử dụng chúng để tính toán các thông số khác của dòng chảy.*

*Trong phương pháp nghiên cứu này, từ các trường véc tơ vận tốc đã được xác định bằng phương pháp PIV (Particle Image Velocimetry), chúng tôi sử dụng phương pháp nội suy với cơ sở đa thức được sử dụng trong phương pháp là đa thức trực giao của Legendre để mô hình hóa chúng.*

**Từ khóa:** Đa thức trực giao Legendre, nội suy và xấp xỉ hàm, trường véc tơ vận tốc, phương pháp PIV.

## 1. GIỚI THIỆU

Với mong ước chinh phục và làm chủ thiên nhiên, tìm cách ứng dụng các quy luật của tự nhiên vào phục vụ sản xuất và đời sống, con người luôn khao khát hiểu biết về các quy luật của tự nhiên, trong đó có quy luật chuyển động của các dòng lưu chất. Ví dụ, đường đi và cường độ của các cơn bão, sự tác động của dòng nước lên tầu thuyền, của dòng không khí tác động lên máy bay, của gió tác động lên các công trình xây dựng vv… Tuy nhiên, việc nghiên cứu quy luật chuyển động của các dòng lưu chất chưa bao giờ là một công việc dễ dàng. Hiện nay, với sự phát triển của khoa học công nghệ, công việc này đã có được những bước tiến vượt bậc.

Một trong những phương pháp tiên tiến được sử dụng trong việc nghiên cứu dòng lưu chất hiện nay đó là phương pháp PIV. Tuy nhiên, với phương pháp PIV, các trường véc tơ vận tốc thu được mới ở dạng các files ảnh rời rạc. Để biểu diễn các trường véc tơ vận tốc dưới dạng các hàm toán học, ta có thể sử dụng phương pháp mô hình hóa các trường véc tơ vận tốc bằng các hàm đa thức trực giao.

Trong phương pháp mô hình hóa, ta bắt gặp một số họ đa thức trực giao được sử dụng phổ biến như mô tả trong Bảng 1 dưới đây:

**Bảng 1. Một số họ đa thức trực giao phổ biến**

| ***Họ đa thức*** | $\Omega$ | $\omega(x,y)$ | $a_n$ | $b_n$ | $c_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Legendre | $[-1;1]^2$ | $1$ | $\frac{2n+1}{n+1}$ | 0 | $\frac{n}{n+1}$ |
| Tchebychev | $[-1;1]^2$ | $\frac{1}{\sqrt{(1-x)^2(1-y)^2}}$ | $2$ | $0$ | $1$ |
| Laguerre | $[0;\infty]^2$ | $e^{-(x+y)}$ | $\frac{-1}{n+1}$ | $\frac{2n+1}{n+1}$ | $\frac{n}{n+1}$ |
| Hermite | $[-\infty;\infty]^2$ | $e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ | $2$ | $0$ | $2n$ |

[1] *Khoa Cơ khí, Trường Đại học Thủy lợi*
[2] *Khoa Cơ khí, Trường Đại học Kinh tế kỹ thuật công nghiệp*

Trong nghiên cứu của chúng tôi, họ đa thức trực giao được lựa chọn là họ đa thức trực giao của Legendre (1752-1833). Với các ưu điểm như, miền xác định $\Omega = [-1,+1] \times [-1,+1]$, hàm trọng số $\omega(x,y) = 1$, vv…

Ta có thể tìm hiểu sơ qua về họ đa thức Legendre thông qua các định nghĩa sau:

**1.1. Đa thức Legendre 1 biến**

Đa thức Legendre là đa thức trực giao trong khoảng $[-1,+1]$. Nếu $P_n$ là đa thức Legendre bậc $n$ và $P_m$ là đa thức Legendre bậc $m$, ta có:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x)dx = 0 \qquad khi\; n \neq m \tag{1}$$

$$\int_{-1}^{+1} (P_n(x))^2 dx = \frac{2}{(2n+1)} \tag{2}$$

và hai đa thức đầu tiên:

$$P_0(x) = 1 \tag{3}$$

$$P_1(x) = x \tag{4}$$

Đa thức Legendre cũng có thể thu được nhờ công thức của Rodriguès:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \tag{5}$$

*Mối quan hệ đệ quy của đa thức Legendre*

Từ công thức của Bonnet, ta có:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \tag{6}$$

Công thức này kết hợp với các công thức *(3)* và *(4)* ta có thể thu được họ đa thức Legendre như sau:

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

…

**1.2. Đa thức Legendre 2 biến**

Đa thức Legendre 2 biến bậc $n$ là đa thức trực giao trên miền $[-1,+1] \times [-1,+1]$ và được xác định bởi:

$$P_{ij}(x,y) = P_i(x)P_j(y)\,; \qquad i + j = n$$

Trong đó, $P_i(x)$ và $P_j(y)$ là các đa thức Legendre 1 biến.

Nếu $u(x,y)$ là một hàm liên tục trên miền $[-1,+1] \times [-1,+1]$, ta tiến hành chiếu nó lên miền của đa thức có bậc $\leq n$. Hay nói cách khác, $u(x,y)$ được xấp xỉ bằng hàm $u_n(x,y)$, với sai số bình phương cực tiểu $Q \mapsto \iint_{-1}^{+1}(u(x,y) - Q(x,y))^2 dxdy$. Với $Q$ là đa thức có bậc $\leq n$.

Như vậy, ta có:

$$u_n(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} u_{ij}P_{ij}(x,y) \tag{7}$$

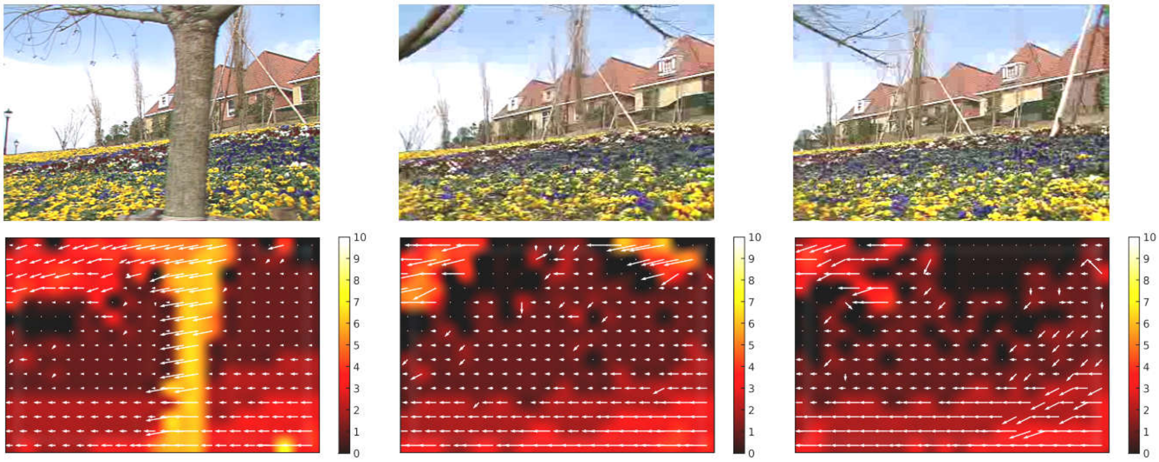
Trong đó, $u_{ij}$ là các hệ số chiếu được xác định theo công thức:

$$u_{ij} = \frac{\iint_{-1}^{+1} u(x,y)P_{ij}(x,y)dxdy}{\iint_{-1}^{+1} P_{ij}^2(x,y)dxdy} \tag{8}$$

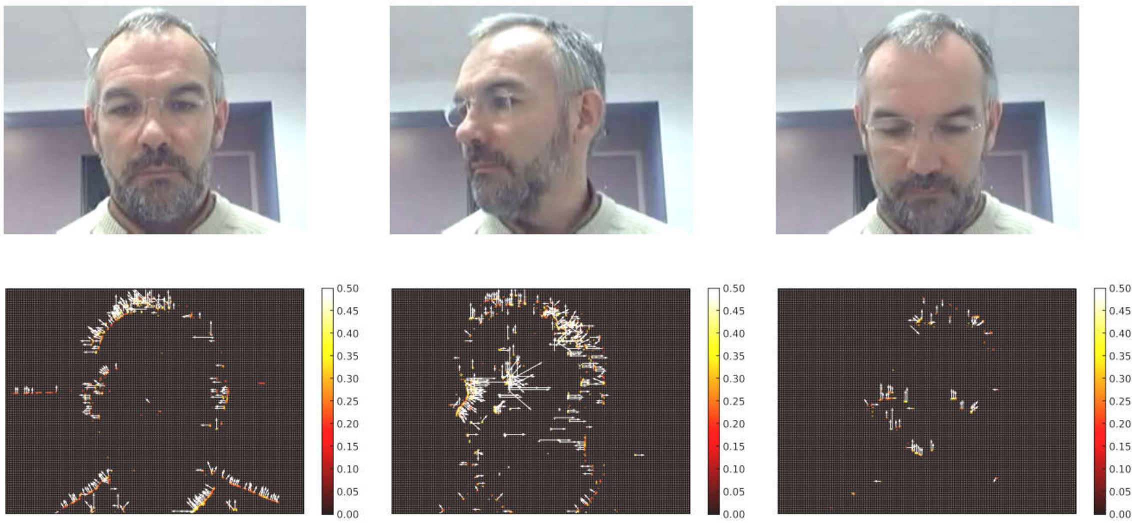
Trường hợp đối với hàm 3 biến trong không gian 3 chiều ta cũng có cách khai triển tương tự.

**1.3. Những nghiên cứu ứng dụng đa thức trực giao trong mô hình hóa chuyển động**

Do có một số hạn chế về cơ sở vật chất, các trang thiết bị thí nghiệm nên hiện nay ở Việt Nam các công trình nghiên cứu mô hình hóa chuyển động bằng các hàm toán học ít được bắt gặp. Trong khi đó, ở các nước tiên tiến do có nền tảng khoa học cơ bản vững chắc, cùng với cơ sở vật chất đầy đủ nên việc ứng dụng toán học để giải quyết các vấn đề phức tạp trong đời sống và kỹ thuật là khá phổ biến. Ta có thể thấy, trong nghiên cứu của M. Druon (Druon, 2009), để mô hình hóa các chuyển động trong tự nhiên Druon cũng sử dụng họ đa thức trực giao của Legendre. Trong các Hình 1 và Hình 2 dưới đây là những minh họa cho kết quả của Druon trong việc số hóa các files ảnh đời thực, giúp máy tính có thể nhận diện, phân tích và đánh giá một cách dễ dàng…



*Hình 1. Mô hình hóa chuyển động của cây cối trong vườn (Druon, 2009)*

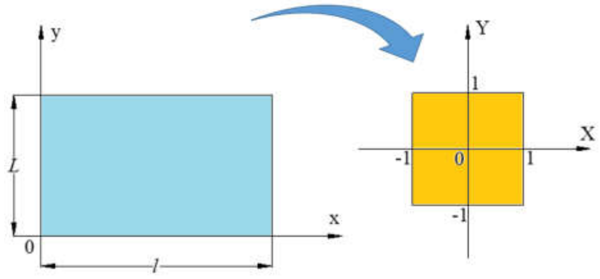


*Hình 2. Mô hình hóa chuyển động của con người (Druon, 2009).*

## 2. XẤP XỈ TRƯỜNG VÉC TƠ VẬN TỐC BẰNG ĐA THỨC LEGENDRE

Ta xét một trường véc tơ vận tốc được giới hạn trong miền phẳng có kích thước $A = [0, l] \times [0, L]$ đặt trong hệ tọa độ x0y. Khi thực hiện phép xấp xỉ trên miền đa thức Legendre $\Omega = [-1, +1] \times [-1, +1]$ đặt trong hệ tọa độ X0Y (Hình 3), với một hệ số tỷ lệ được sử dụng như sau:

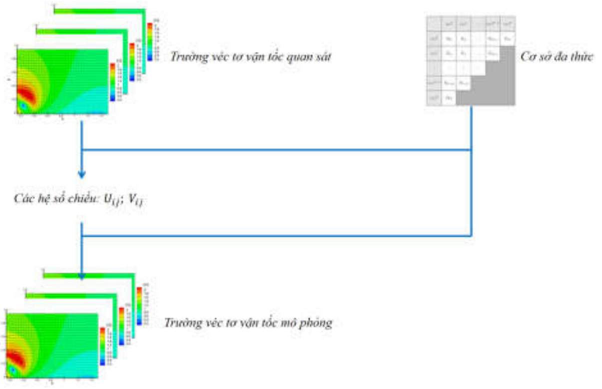
$$X = \frac{2}{l}x - 1; \qquad Y = \frac{2}{L}y - 1$$




*Hình 3. Miền quan sát và miền đa thức*

Như vậy, trường véc tơ vận tốc trong miền quan sát $A$: $\left(u(x,y);v(x,y)\right)$ được ánh xạ sang miền đa thức $\Omega$: $\left(U(X,Y);V(X,Y)\right)$, nơi mà mỗi điểm $M(X,Y)\in\Omega$ là ảnh của điểm $m(x,y)\in A$, với $U(X,Y)=u(x,y)$ và $V(X,Y)=v(x,y)$.

Toàn bộ quá trình mô hình hóa các trường véc tơ vận tốc của dòng chảy có thể được mô tả dưới dạng hình ảnh (Hình 4) dưới đây.




*Hình 4. Quá trình mô hình hóa các trường véc tơ vận tốc*

Trường véc tơ vận tốc mô phỏng tại từng thời điểm thu được bằng phép xấp xỉ với hàm đa thức bậc $n$, được diễn giải trong các biểu thức dưới đây:

$$U_n(X,Y,t)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}U_{ij}(t)P_{ij}(X,Y) \quad (9)$$

$$V_n(X,Y,t)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}V_{ij}(t)P_{ij}(X,Y) \quad (10)$$

Trong đó, $P_{ij}(X,Y)$ là đa thức trực giao Legendre bậc $n$, và $U_{ij}(t),V_{ij}(t)$ là các hệ số chiếu.

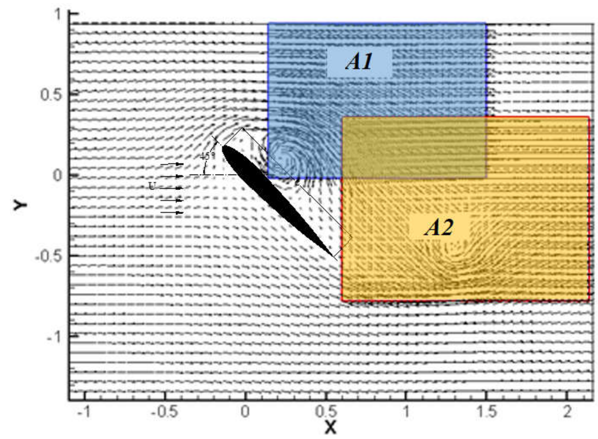
Các hệ số chiếu thu được thông qua các phép tính tích phân sau:

$$U_{ij}(t)=\frac{\iint_S U(X,Y,t)P_{ij}(X,Y)dXdY}{\iint_S P_{ij}(X,Y)P_{ij}(X,Y)dXdY}$$

$$V_{ij}(t)=\frac{\iint_S V(X,Y,t)P_{ij}(X,Y)dXdY}{\iint_S P_{ij}(X,Y)P_{ij}(X,Y)dXdY}$$

## 3. KẾT QUẢ VÀ SO SÁNH

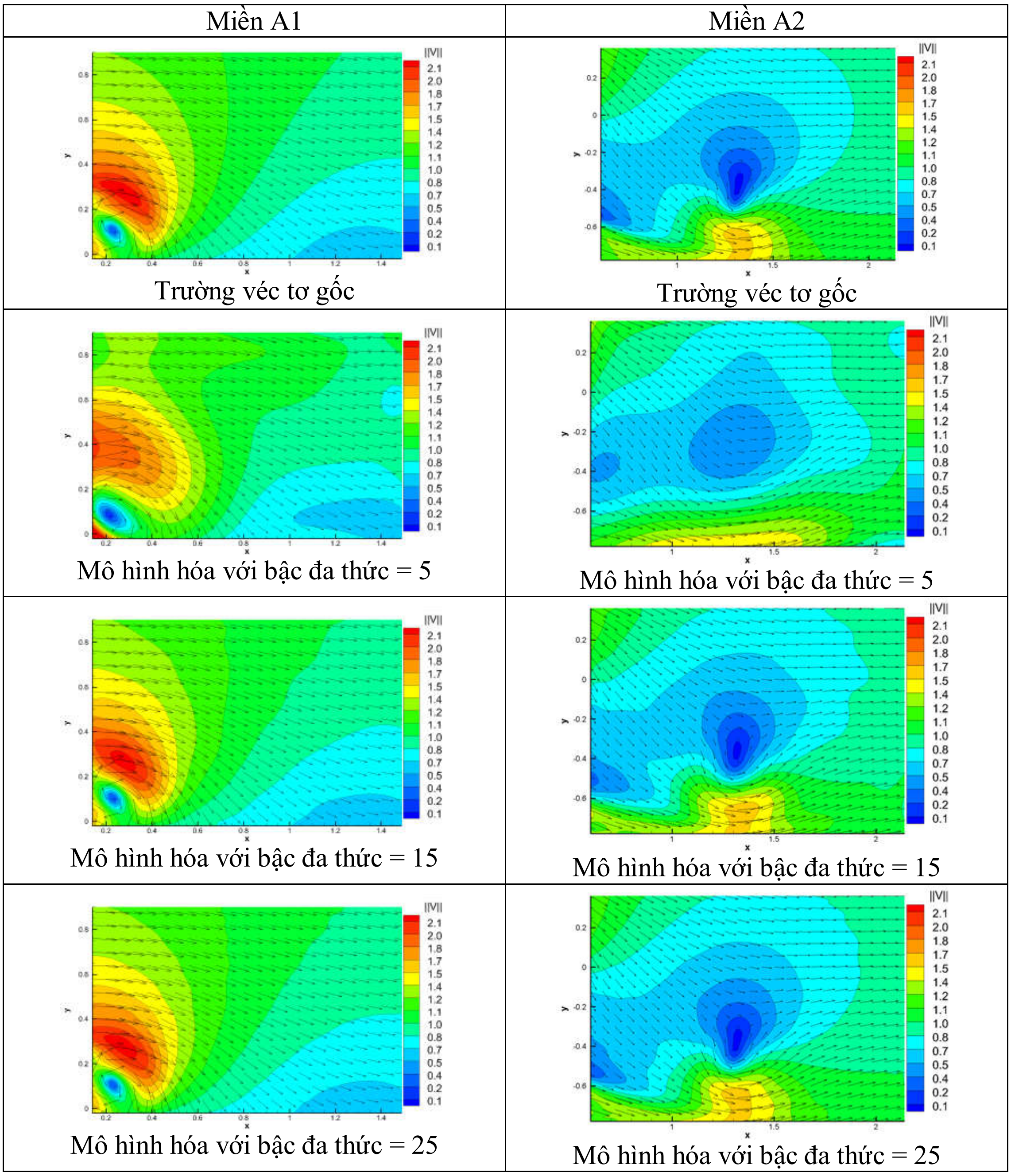
Để tiện cho việc so sánh và đánh giá về tính hiệu quả của phương pháp, chúng tôi sử dụng bộ dữ liệu trong một nghiên cứu của T. Jardin (Jardin, 2009).




*Hình 5. Cửa sổ quan sát và các miền chọn*

Trong nghiên cứu của T. Jardin, một profile NACA0012 có chiều dài dây cung $c=1m$ được đặt trong dòng chảy với góc tới 45°. Kích thước cửa sổ quan sát $l=3{,}26m$; $L=2{,}34m$. Trường véc tơ gốc được khởi tạo với khoảng thời gian giữa các ảnh liên tiếp ($\Delta t=0{,}02s$).

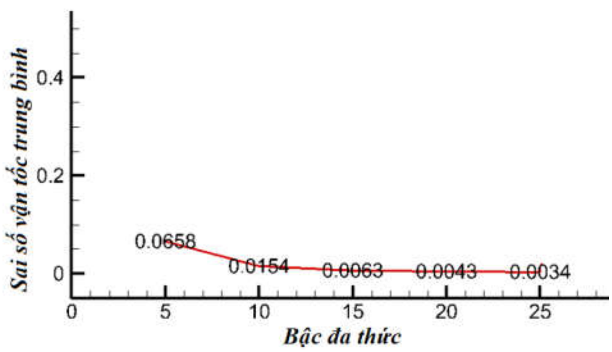
Trên cửa sổ quan sát, ta chọn đại diện một số miền ($A1,A2$), nơi có những chuyển động phức tạp của dòng chảy để thực hiện việc mô hình hóa (Hình 5). Bậc của đa thức Legendre được sử dụng là 5 ; 10 ; 15 ; 20 và 25. Dưới đây là hình ảnh của trường véc tơ gốc ban đầu và các trường véc tơ được mô hình hóa.




*Hình 6. Trường véc tơ gốc và trường mô phỏng trên các miền A1, A2.*

Ta có thể dễ dàng nhận thấy, với đa thức bậc 15 hình ảnh của trường véc tơ mô phỏng đã gần như trùng khớp với trường véc tơ gốc ban đầu. Sai số vận tốc trung bình xét trên toàn miền ứng với mỗi bậc đa thức được cho trong hình dưới đây (Hình 7).

Ví dụ, với trường véc tơ được xấp xỉ bằng đa thức trực giao Legendre bậc 15, sai số vận tốc trung bình xét trên toàn miền là 0.63%. Với đa thức trực giao Legendre bậc 25, sai số lúc này chỉ còn là 0.34%, một sai số có thể được xem là rất nhỏ.




*Hình 7. Sai số vận tốc trung bình ứng với bậc của đa thức*

## 4. KẾT LUẬN

Việc giải quyết các bài toán thủy khí động lực luôn là một thách thức đối với các nhà khoa học, do khối lượng tính toán lớn và sự biến đổi liên tục các thông số của dòng chảy. Với các trường chuyển động của dòng chảy được mô hình hóa dưới dạng các hàm toán học sẽ mang lại những ưu điểm nổi bật như :

- Cho phép giải quyết các bài toán thủy khí động lực một cách khá dễ dàng nhờ vào sự trợ giúp của máy tính.
- Việc mô hình hóa các trường véc tơ sẽ giúp tối ưu về dung lượng lưu trữ.
- Sử dụng phương pháp chiếu trên cơ sở đa thức hoàn toàn không phụ thuộc vào các đặc tính vật lý của dòng chảy.

Từ những ưu điểm kể trên, phương pháp này đã và đang được áp dụng nhiều trong lĩnh vực đo lường không xâm nhập (*Non-Intrusive Measurements*).


## LỜI CẢM ƠN

Một lần nữa, chúng tôi xin chân thành cảm ơn GS. TS. Laurent DAVID, TS. Frédéric PONS, TS. Benoit TREMBLAIS và tất cả những người bạn tại Phòng thí nghiệm HydÉE, Viện Pprime, Đại học Poitiers, Cộng hòa Pháp, đã giúp đỡ để chúng tôi đạt được những kết quả nghiên cứu này.


## TÀI LIỆU THAM KHẢO


Druon, M., (2009). *Modélisation du mouvement par polynômes orthogonaux: Application à l'étude d'écoulements fluides,* Poitiers: PhD thesis, Université de Poitiers.

Jardin, T., (2009). *Analyse numérique et expérimentale de la sustentation par vol battu. Application aux micro-drones,* Poitiers: PhD thesis, Université de Poitiers.

Jardin, T., Chatellier, L., Farcy, A. & David, L., (2009). *"Correlation between vortex structures and unsteady loads for flapping motion in hover"*. Experiments in Fluids, 47(4-5), pp. 655-664.



**Abstract:**

**MODELING THE VELOCITY VECTOR FIELDS BY LEGENDRE'S ORTHOGONAL POLYNOMIALS**

*The modeling of fluid flows has always been a matter of great interest to scientists. In this paper, we introduce a method that has been studied and tested on experimental data and gives good results. It is using interpolation in mathematics to model the velocity vector fields of the flow using multivariable polynomial basis. From the modeled velocity vector fields, we can simply use it to calculate other parameters of the flow.*

*In our study, the velocity vector fields are determined by PIV (Particle Image Velocimetry) method, the polynomial basis used in the interpolation method is Legendre's orthogonal polynomials.*



**Keywords:** Legendre's orthogonal polynomials, interpolation and approximation, velocity vector fields, PIV method.

*Ngày nhận bài: 28/4/2023*

*Ngày chấp nhận đăng: 29/5/2023*