

MỘT VÀI TRAO ĐỔI VỀ PHƯƠNG PHÁP THÔNG SỐ BAN ĐẦU TRONG SỨC BỀN VẬT LIỆU

Nguyễn Thái Hoàng¹, Hoàng Đình Trí¹

Tóm tắt: Phương pháp thông số ban đầu dùng để xác định chuyển vị của dầm có nhiều ưu điểm. Ưu điểm thứ nhất là có thể áp dụng cho dầm có ít hay nhiều đoạn thanh, ưu điểm thứ hai là có thể xác định cả chuyển vị và nội lực của dầm tĩnh định cũng như siêu tĩnh. Tuy nhiên hiện nay phương pháp thông số ban đầu được trình bày trong các giáo trình Sức bền vật liệu còn có một số vấn đề cần trao đổi thêm cho hợp lý.

Trong khuôn khổ bài báo này nhóm tác giả sẽ trình bày ba vấn đề và phương pháp giải quyết ba vấn đề này.

Từ khóa: Phương pháp thông số ban đầu, sức bền vật liệu, chuyển vị của dầm.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong sức bền vật liệu, phần xác định chuyển vị của dầm bằng phương pháp thông số ban đầu (TSBD) có ba vấn đề cần trao đổi thêm cho hợp lý.

Vấn đề thứ nhất là bảng thông số trình bày trong các ví dụ tính chuyển vị của dầm theo phương pháp TSBD trong (Vũ Đình Lai, ntk 2009), (Phạm Ngọc Khánh, ntk 2006), (Trần Văn Liên, 2013), (Nguyễn Văn Liên, 2021), (Г.С Варданян, ntk 1995) còn rườm rà, viết lặp lại các thông số ở các cột, trong khi các thông số này đã được ghi ở cột đầu tiên của bảng. Mặt khác, nếu hiểu rõ ý nghĩa của công thức truy hồi thì có thể viết ngay phương trình độ võng cho tất cả các đoạn của dầm, kể cả đoạn đầu tiên mà không cần viết rõ ra phương trình của đoạn đầu tiên như ở trong các tài liệu nêu trên.

Vấn đề thứ hai là trong các tài liệu trích dẫn ở trên, khi thiết lập công thức truy hồi để xác định phương trình độ võng cho các đoạn của dầm đều qui ước chiều dương của tải trọng phân bố q và tải trọng tập trung P là chiều hướng từ dưới lên trên. Liệu có nhất thiết phải qui ước như vậy không? Nếu qui ước chiều dương của các đại lượng này ngược lại, tức là hướng từ trên xuống dưới, thì công thức truy hồi xác định trục võng của dầm sẽ thay đổi thế nào?

Vấn đề thứ ba là trong các tài liệu tham khảo nêu trên, chiều dương của độ võng y được lấy hướng từ trên xuống dưới. Nếu lấy chiều dương của trục võng y ngược lại, tức là hướng từ dưới lên trên thì công thức truy hồi xác định trục võng của dầm có thay đổi không?

Dưới đây sẽ trình bày lần lượt từng vấn đề.

2. GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ

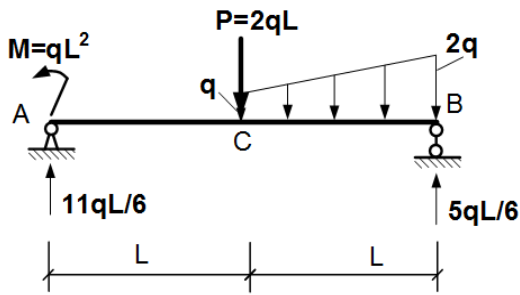
2.1. Nghiên cứu cải tiến phương pháp TSBD hiện hành

Trong sách Sức bền vật liệu (SBVL) đã tương tự dầm ban đầu có thêm đoạn “0” chỉ để xác định phương trình độ võng đoạn đầu tiên của dầm và sau đấy áp dụng công thức truy hồi đã có để xác định phương trình độ võng đoạn 2, 3,... và đoạn cuối cùng của dầm. Ở đây chúng tôi thấy sách đã phức tạp hoá vấn đề. Để đơn giản ta chỉ tương tự dầm có thêm đoạn “0” (là đoạn có ngoại lực, nội lực, chuyển vị bằng 0) và áp dụng ngay công thức truy hồi tìm độ võng đoạn 1, 2,... của dầm. Phương pháp cũng sẽ đơn giản hơn khi sắp xếp lại bảng TSBD bằng cách tạo cột đầu tiên là 6 TSBD ở dạng tổng quát, còn các cột còn lại chỉ là các số liệu cụ thể.

Để thấy rõ các bước thực hiện và sự đơn giản của phương pháp TSBD cải tiến, ta xét ví dụ cụ thể sau:

Xác định chuyển vị đứng tại tiết diện C của dầm có kích thước và chịu lực như hình 1.

¹ Khoa Công trình, Trường Đại học Thủy lợi



Hình 1. Dầm cân xác định độ võng

Bảng 1. Bảng TSBD (ĐN là điểm nối)

ΔS_a \ ĐN	A(a=0)	C(a=L)
Δy_a	0	0
$\Delta \varphi_a$	$\Delta \varphi_A \neq 0?$	0
ΔM_a	$-qL^2$	0

ΔS_a \ ĐN	A(a=0)	C(a=L)
ΔQ_a	$+\frac{11}{6}qL$	$-2qL$
Δq_a	0	$-q$
$\Delta q'_a$	0	$-q/L$

Các bước thực hiện:

Bước 1: Tương tự có thêm đoạn “0” trước đoạn 1 (đoạn có độ võng bằng 0) và dầm tính toán có 3 đoạn là 0, 1, 2;

Bước 2 : Lập bảng TSBD cho dầm tính toán (chú ý bảng TSBD có sắp xếp lại cho dễ áp dụng công thức truy hồi).

Bước 3: Lần lượt xác định phương trình độ võng của đoạn 1 , đoạn 2 từ công thức truy hồi về độ võng đã có trong sách SBVL. Với dầm trên gối cứng có $EJ=\text{const}$, công thức truy hồi về độ võng là:

$$y_{i+1}(z) = y_i(z) + \Delta y_a + \Delta \varphi_a (z - a) - \frac{1}{EJ} \left[\frac{\Delta M_a}{2!} (z - a)^2 + \frac{\Delta Q_a}{3!} (z - a)^3 + \frac{\Delta q_a}{4!} (z - a)^4 + \frac{\Delta q'_a}{5!} (z - a)^5 \right] \quad (1)$$

Từ (2.1) và bảng TSBD ,ta có :

$$y_1(z) = 0 + 0 + \Delta \varphi_A z - \frac{1}{EJ} \left[-\frac{ql^2}{2} z^2 + \frac{11ql}{6.6} z^3 + 0 + 0 \right]$$

$$= \Delta \varphi_A z + \frac{ql^2}{2EJ} z^2 - \frac{11ql}{36EJ} z^3$$

$$y_2(z) = y_1(z) + 0 + 0 - \frac{1}{EJ} \left[0 - \frac{2ql}{6} (z - l)^3 - \frac{q}{24} (z - l)^4 - \frac{q}{120EJ} (z - l)^5 \right] = \Delta \varphi_A z + \frac{ql^2}{2EJ} z^2 - \frac{11ql}{36EJ} z^3 + \frac{ql}{3EJ} (z - l)^3 + \frac{q}{24EJ} (z - l)^4 + \frac{q}{120EJ} (z - l)^5$$

Từ điều kiện biên $y_2(z = 2l) = 0 \rightarrow \Delta \varphi_A = + \frac{11ql^5}{360EJ}$

Bước 4: Xác định chuyển vị đứng tại C:

$$y_c = y_1(z = l) = + \frac{9ql^4}{40EJ} \quad (4)$$

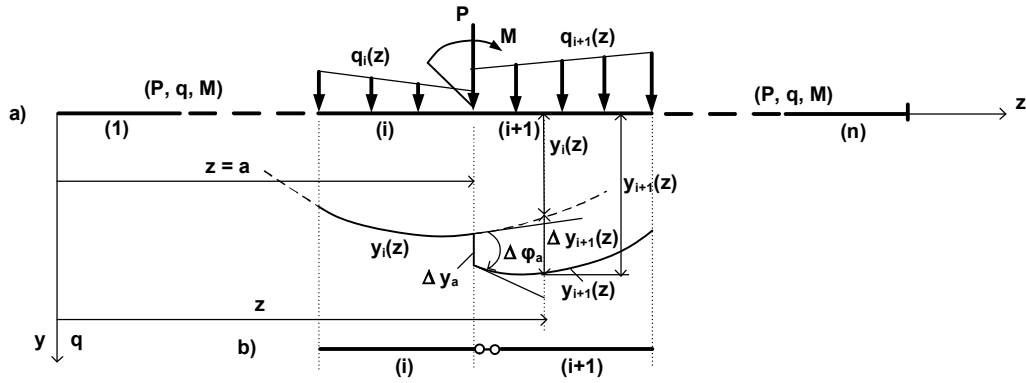
Qua ví dụ trên, ta thấy cách cải tiến tính chuyển vị sẽ nhanh hơn, đơn giản hơn so với cách tính đã trình bày trong sách SBVL.

2.2. Thể hiện lại công thức truy hồi về độ võng của dầm trên gối cứng với quy ước chiều dương của tải trọng phân bố là đi xuống

Do chọn trục y có chiều dương hướng xuống là dương, nên

$$y'' = -\frac{M}{EJ}, \quad y''' = -\frac{Q}{EJ} \quad (2)$$

Do quy ước q có chiều hướng xuống là dương nên $Q' = -q$ tức $y^{IV} = +\frac{q}{EJ}, \quad y^V = +\frac{q'}{EJ} \quad (3)$



Hình 2. a) Dầm tổng quát có n đoạn; b) Đoạn thứ i và i+1

Xét dầm có n đoạn, được ký hiệu theo thứ tự là 1, 2, ..., i, i+1, ..., n. Giả sử xét hai đoạn liền kề nhau là i và i+1 có tải trọng tác dụng, có đường đàn hồi như hình 2a. Chọn liên kết tổng quát tại

tiết diện nối hai đoạn là liên kết thanh như hình 2b. Công thức truy hồi về độ võng của dầm trên gối cứng (giả thiết $EJ = \text{const}$):

Từ $y_{i+1}(z) = y_i(z) + \Delta y_{i+1}(z)$, thực hiện khai triển Taylor cho hàm số gia về độ võng $\Delta y(z - a)$, ta có :

$$\Delta y(z - a) = \Delta y(a) + \Delta \varphi(a)(z - a) + \frac{\Delta y''(a)}{2!}(z - a)^2 + \frac{\Delta y'''(a)}{3!}(z - a)^3 + \frac{\Delta y^{IV}(a)}{4!}(z - a)^4 + \frac{\Delta y^V(a)}{5!}(z - a)^5 \quad (4)$$

$$\text{Trong đó : } \Delta y(a) = y_{i+1}(a) - y_i(a) = \Delta y_a$$

$$\Delta y'(a) = y'_{i+1}(a) - y'_i(a) = \Delta \varphi_a$$

$$\text{Từ (2)} \rightarrow \Delta y''(a) = y''_{i+1}(a) - y''_i(a) = -\frac{1}{EJ} [M_{i+1}(a) - M_i(a)] = -\frac{\Delta M_a}{EJ}$$

$$\Delta y'''(a) = y'''_{i+1}(a) - y'''_i(a) = -\frac{1}{EJ} [Q_{i+1}(a) - Q_i(a)] = -\frac{\Delta Q_a}{EJ}$$

$$\text{Từ (3)} \rightarrow \Delta y^{IV}(a) = +\frac{1}{EJ} [q_{i+1}(a) - q_i(a)] = +\frac{\Delta q_a}{EJ}$$

$$\Delta y^V(a) = +\frac{1}{EJ} [q'_{i+1}(a) - q'_i(a)] = +\frac{\Delta q'_a}{EJ}$$

Từ đây ta có công thức truy hồi về độ võng của dầm trên gối cứng khi quy ước chiều dương của tải trọng q hướng xuống sẽ là :

$$y_{i+1}(z) = y_i(z) + \Delta y_a + \Delta \varphi_a(z - a) - \frac{1}{EJ} \left[\frac{\Delta M_a}{2!}(z - a)^2 + \frac{\Delta Q_a}{3!}(z - a)^3 - \frac{\Delta q_a}{4!}(z - a)^4 - \frac{\Delta q'_a}{5!}(z - a)^5 \right] \quad (5)$$

So sánh (5) và (1), ta thấy chúng chỉ khác dấu trước hai thông số $\Delta q'_a$ và Δq_a . Kết quả tính độ võng theo công thức (5) hay (1) cũng hoàn toàn giống nhau vì trong hai bảng TSBD dấu tương ứng của Δq_a và $\Delta q'_a$ cũng sẽ ngược nhau.

2.3. Thể hiện công thức truy hồi về độ võng của dầm trên gối cứng khi chiều trục y đi lên

Cần chứng minh hai trường hợp quy ước chiều dương của q là đi lên (theo sách SBVL) và q đi xuống (theo đề nghị của tác giả).

Với quy ước cả y lẫn q hướng lên là dương ta có:

$$y'' = +\frac{M}{EJ}, y''' = +\frac{Q}{EJ}, y^{IV} = +\frac{q}{EJ}, y^V = +\frac{q'}{EJ}$$

Công thức truy hồi về độ võng có dạng:

$$y_{i+1}(z) = y_i(z) + \Delta y_\alpha + \Delta \varphi_\alpha (z - \alpha) + \frac{1}{EJ} \left[\frac{\Delta M_\alpha}{2!} (z - \alpha)^2 + \frac{\Delta Q_\alpha}{3!} (z - \alpha)^3 + \frac{\Delta q_\alpha}{4!} (z - \alpha)^4 + \frac{\Delta q'_\alpha}{5!} (z - \alpha)^5 \right] \quad (6)$$

Với qui ước y hướng lên là dương và q hướng xuống là dương ta có:

$$y'' = +\frac{M}{EJ}, y''' = +\frac{Q}{EJ}, y^{IV} = -\frac{q}{EJ}, y^V = -\frac{q'}{EJ}$$

Công thức truy hồi về độ võng có dạng:

$$y_{i+1}(z) = y_i(z) + \Delta y_\alpha + \Delta \varphi_\alpha (z - \alpha) + \frac{1}{EJ} \left[\frac{\Delta M_\alpha}{2!} (z - \alpha)^2 + \frac{\Delta Q_\alpha}{3!} (z - \alpha)^3 - \frac{\Delta q_\alpha}{4!} (z - \alpha)^4 - \frac{\Delta q'_\alpha}{5!} (z - \alpha)^5 \right] \quad (7)$$

So sánh tương ứng (1), (5) với (6), (7) ta thấy có khác nhau về dấu trước các thông số $\Delta M_\alpha, \Delta Q_\alpha, \Delta q_\alpha, \Delta q'_\alpha$.

3. KẾT LUẬN

Với bảng thông số thiết lập như trình bày ở bảng 1 trình bày đơn giản, sáng sủa và gọn hơn.

Quy ước chiều dương của q hoặc chiều dương của trục y hướng lên hoặc xuống có dẫn đến thay đổi dấu của một số số hạng trong công thức truy

hồi, song chuyển vị của dấu xác định không có gì thay đổi. Việc thể hiện thêm công thức truy hồi ứng với qui ước chiều dương của q đi xuống hoặc chiều dương của trục y đi lên, giúp sinh viên hiểu vấn đề sâu sắc và tổng quát hơn.

Có thể áp dụng các kết quả nghiên cứu ở trên cho công thức truy hồi xác định phương trình độ võng của dầm trên nền đàn hồi Winkler có chiều dài hữu hạn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Vũ Đình Lai, Nguyễn Xuân Lựu, Bùi Đình Nghi. *Sức bền vật liệu*. Nhà xuất bản Giao thông vận tải Hà Nội 2009.
 Phạm Ngọc Khánh, Nguyễn Ngọc Oanh, Đoàn Văn Đào, Đỗ Khắc Phương, Nguyễn Công Thắng. *Sức bền vật liệu*. Nhà xuất bản từ điển bách khoa Hà Nội 2006.
 Trần Văn Liên. *Sức bền vật liệu*. Nhà xuất bản xây dựng Hà Nội 2013.
 Nguyễn Văn Liên. *Sức bền vật liệu*. Nhà xuất bản xây dựng Hà Nội 2021.
 Г.С Варданян, В.И. Андреев, Н.М. Атаров, А.А. Горшков. *Сопротивление Материалов с основами теории упругости и пластичности*. Москва 1995.

Abstract:

DISCUSSION ON METHOD OF SINGULARITY FUNCTIONS IN MECHANICS OF MATERIALS

The method of singularity functions is often used to determine the deflection of the beams thanks to its advantages. The first advantage is that it can be applied to beams with few or many segments. Secondly, this method is able to determine both the deflection and internal forces of statically determinate beams as well as indeterminate beams. However, the method of singularity functions presented in mechanics of materials textbooks still has some issues that need further discussion for clarification. In the context of this article, the authors will present three issues and propose solutions to address these issues.

Keywords: Method of singularity function, mechanics of materials, beam deflection.

Ngày nhận bài: 25/9/2023

Ngày chấp nhận đăng: 25/10/2023